Livret de révisions

de la 3^e à la 2^{nde}

Collège Claude Monet

Propriété *Addition et soustraction*

Soient a, b et c trois nombres avec $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Méthode

Pour additionner ou soustraire deux nombres en écritures fractionnaires, il faut (si ce n'est pas le cas) commencer par les réduire au même dénominateur.
Pour réduire les deux nombres au même dénominateur, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs donnés.

Exemples

$$\frac{5}{7}+\frac{8}{7}=\frac{5+8}{7}=\frac{13}{7} \qquad \frac{6}{11}-\frac{9}{11}=\frac{6-9}{11}=-\frac{3}{11}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{6}+\frac{14}{6}=\frac{19}{6} \qquad \frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=-\frac{1}{24}$$

Propriété *Multiplication*

Soient a, b, c et d quatre nombres avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Méthode

Avant de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, on peut penser à simplifier.

Exemples

$$5\times\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3} \qquad \frac{5}{6}\times\frac{7}{3}=\frac{35}{18} \qquad \frac{15}{36}\times\frac{63}{25}=\frac{15\times 63}{36\times 25}=\frac{5\times 3\times 4\times 9}{7\times 9\times 5\times 5}=\frac{12}{35}$$

Propriété *Division*

Soient a, b, c et d quatre nombres avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Exemple

$$5\div\frac{2}{3}=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2} \qquad \frac{4}{5}\div 7=\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{4}{35} \qquad \frac{4}{15}\div\frac{12}{35}=\frac{4}{15}\times\frac{35}{12}=\frac{4\times 35}{15\times 12}=\frac{4\times 5\times 7}{3\times 5\times 3\times 4}=\frac{7}{9}$$

EXERCICE 1

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \qquad B = \frac{3}{5} - \frac{17}{15} \qquad C = \frac{-7}{8} \times \frac{4}{21} \qquad D = \frac{-3}{7} \div \frac{4}{5}$$

EXERCICE 2

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$E = \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) \times \frac{1}{5} \qquad F = \left(\frac{1}{2} - 6\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right) \qquad G = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{7}}{2 - \frac{1}{4}}$$

EXERCICE 3

On considère les expressions A, B et C suivantes.

$$A = 3 + \frac{1}{7} \qquad B = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} \qquad C = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

1. Calculer les expressions A, B et C en donnant chaque résultat sous la forme fractionnaire.
2. Donner un arrondi au dix-millième de chacun de ces résultats.
3. Quel nombre célèbre a-t-on ainsi approché ?

EXERCICE 4

Après l'école, Léa mange $\frac{1}{4}$ du paquet de gâteaux qu'elle vient d'ouvrir.

De retour du collège, sa soeur Agathe mange les $\frac{2}{3}$ des gâteaux restants dans le paquet entamé par Léa. Il reste alors 5 gâteaux.

Quel était le nombre initial de gâteaux dans le paquet ?

EXERCICE 5

Simplifier les expressions suivantes :

$$H = \frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} \qquad I = \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{5x} \qquad J = 5 + \frac{3}{2+x} \qquad K = \frac{1}{2-3x} - \frac{1}{2+3x}$$

Définition — *Puissances d'un nombre relatif*

Soit a un nombre relatif non nul et soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad \text{et} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Remarque

- Si $a \neq 0$ alors $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
- Si $n \geqslant 1$ alors $0^n = 0$

Définition — *Puissances de 10*

Soit n un entier naturel.

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ zéros}} \qquad \text{et} \qquad 10^{-n} = \underbrace{0,000\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemples

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$10^7 = 10\ 000\ 000 \qquad 10^{-5} = 0,000\ 01$$

Propriété — *Opérations sur les puissances*

Soient a et b deux nombres non nuls et soient n et p deux entiers naturels :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples

$$\frac{(7^4)^2 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^8 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^6}{7^4} = 7^2 = 49 \qquad \frac{10^{-7} \times 10^3}{(10^3)^{-2}} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100$$

Définition — *Écritrure scientifique d'un nombre*

L'`écriture scientifique` d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n est un entier relatif.

Exemples

$$1\ 800\ 000 = 1,8 \times 10^6 \qquad 0,000\ 000\ 009\ 56 = 9,56 \times 10^{-9}$$

EXERCICE 1

Compléter le tableau ci-dessous :

x	$\dfrac{1}{10^3}$	5^{-2}	$(-1)^{17}$	$(-2)^3$	$78,85 \times 10^5$
Écriture décimale de x					

EXERCICE 2

Compléter le tableau ci-dessous :

x	$2^3 \times 2^4$	$3^{-9} \times 3^5$	$6^2 \times 6^5 \times 6^{-4}$	$\dfrac{5^{-3}}{5^2}$	$\left((-3)^5\right)^2$	$5^4 \times 2^4$
Écriture de x sous forme d'une seule puissance						

EXERCICE 3

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 3\ 780\ 000$ $\qquad$ $B = 123,8 \times 10^{-5}$

EXERCICE 4

La masse d'un atome de carbone est égale à $1,99 \times 10^{-26}$ kg.
Les chimistes considèrent des paquets (appelés moles) contenant $6,022 \times 10^{23}$ atomes.

1. Calculer la masse en grammes d'un tel paquet d'atomes de carbones.
2. Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

EXERCICE 5

Simplifier les expressions suivantes :

$A = (a^{-2})^3$

$B = (a^{-5}b^2)^{-1} \times ab^{-3}$

$C = \dfrac{a^5b^{-4}}{a^{-5}b^{-2}}$

$D = -2x^3 \times 5x \times 3^{-2} \times x^{-5}$

$E = (-2x^5)^3$

$F = \dfrac{ab^{-3} \times (a^{-2}b^3) \times (ab^{-1})^2}{(ab^2)^{-1} \times ab}$

Définition — *Racine carrée d'un nombre positif*

Soit a un nombre positif.
On appelle `racine carrée` de a, le nombre positif noté $\sqrt{a}$, dont la carré vaut a.

Exemples

$\sqrt{49} = 7$ car $7 > 0$ et $7^2 = 49$ $\qquad$ $\sqrt{1,44} = 1,2$ car $1,2 > 0$ et $1,2^2 = 1,44$

Propriétés — *Opérations avec des racines carrées*

Pour tout nombre a positif :
- $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples

$(\sqrt{7})^2 = 7$ $\qquad$ $\sqrt{11^2} = 11$
$(5\sqrt{2})^2 = 5^2 \times (\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$
$\sqrt{3} \times \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 48} = \sqrt{144} = 12$
$\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

Remarque

Pour tous nombres a et b positifs :
$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Propriété — *Équation du type $x^2 = a$*

- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0.
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions opposées : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple

Un carré a pour aire 125 cm^2. Quel est la longueur de son côté ?
On note c la longueur du côté. On a alors : $c^2 = 125$.
$125 > 0$ donc l'équation $c^2 = 125$ admet deux solutions opposées : $\sqrt{125}$ et $-\sqrt{125}$.
$c > 0$ donc $c = \sqrt{125}$ cm.
On peut alors c sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier et b entier positif le plus petit possible.
$c = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ cm.

EXERCICE 1

Calculer, sans calculatrice et en écrivant les étapes intermédiaires :

$\sqrt{(-3)^2} =$	$(-\sqrt{3})^2 =$	$-\sqrt{3}^2 =$	$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 =$	$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) =$
$2\sqrt{3}\times\sqrt{3} =$	$\sqrt{3}\times\sqrt{12} =$	$\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} =$	$\sqrt{7+42} =$	$\sqrt{9+16} =$

EXERCICE 2

Simplifier (dénominateur entier dans les deux derniers cas) :

$\sqrt{2}(3\sqrt{2}-5) =$	$\sqrt{((-3)+2)^2+(4-5)^2} =$	$\dfrac{\sqrt{81-49}}{\sqrt{4+4}} =$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$

EXERCICE 3

On considère un triangle ABC tel que $\text{AB} = \sqrt{45}-\sqrt{20}$, $\text{AC} = \sqrt{54}-\sqrt{24}$ et $\text{BC} = \sqrt{11}$.
ABC est-il un triangle rectangle ? Justifier.

EXERCICE 4

On considère les nombres suivants :

$$A = \frac{7}{\sqrt{5}-2} - \frac{7}{\sqrt{5}+2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

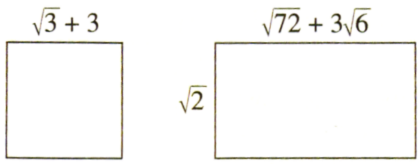
Prouver que A et B sont des nombres entiers.

EXERCICE 5

1. Montrer que le nombre $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de l'équation $x^2 = x+1$.
2. Calculer la valeur exacte de $b = \sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$.

EXERCICE 6

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en cm.
La mesure du côté du carré est : $\sqrt{3}+3$.
Les dimensions du rectangle sont : $\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.



1. Calculer l'aire A_1 du carré et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ où a, b et c sont trois nombres entiers positifs.
2. Calculer l'aire A_2 du rectangle.
3. Vérifier que $A_1 = A_2$.

Propriété — *Simple distributivité*

Soient a, b et k trois nombres quelconques :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad\qquad k(a-b) = ka - kb$$

Exemples

1. Développer les expressions suivantes :
   $2x(3x+7) = 2x \times 3x + 2x \times 7 = 6x^2 + 14x$ $\qquad$ $5x(3x-4) = 5x \times 3x - 5x \times 4 = 15x^2 - 20x$
2. Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 15x^2 - 20x \\ &= 3 \times 5 \times x \times x - 4 \times 5 \times x \\ &= 5x(3x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-4) \\ &= (3x-1)[(3x-1)-(2x-4)] \\ &= (3x-1)(3x-1-2x+4) \\ &= (3x-1)(x+3) \end{aligned}$$

Propriété — *Double distributivité*

Soient a, b, c et d quatre nombres quelconques :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple

Développer et réduire :

$$\begin{aligned} A &= (3x+2)(4x-5) \\ &= 3x \times 4x + 3x \times (-5) + 2 \times 4x + 2 \times (-5) \\ &= 12x^2 - 15x + 8x - 10 \\ &= 12x^2 - 7x - 10 \end{aligned}$$

Propriété — *Identités remarquables*

Soient a et b deux nombres quelconques :

$(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemples

1. Développer et réduire :

$$\begin{aligned} A &= (5x-3)^2 \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ &= 25x^2 - 30x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (7x-6)(7x+6) \\ &= (7x)^2 - 6^2 \\ &= 49x^2 - 36 \end{aligned}$$

2. Factoriser les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned} C &= 16x^2 + 40x + 25 \\ &= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 5 + 5^2 \\ &= (4x+5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 64x^2 - 9 \\ &= (8x)^2 - 3^2 \\ &= (8x-3)(8x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (3x-5)^2 - 81 \\ &= (3x-5)^2 - 9^2 \\ &= (3x-5-9)(3x-5+9) \\ &= (3x-14)(3x+4) \end{aligned}$$

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2x-3)(5x-4)$	$B = 2x(5x-3)$	$C = 3x-(x-1)-(x+7)(x+3)$
$D = (x+5)^2$	$E = (6+7x)(6-7x)$	$F = (4x-1)^2$

Exercice 2

Après avoir identifié le facteur commun, factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2+2x$	$B = 7x(x-4)+(x-4)^2$	$C = (x+1)(2x+5)-(x+1)(3x+4)$
$D = 9u^2+3u$	$E = (2-t)(3t+1)+(3t+1)$	$F = (2x-3)^2-(2x+3)(x+7)$

Exercice 3

En utilisant les identités remarquables, factoriser les expressions suivantes :

$A = 81-64t^2$	$B = 49x^2-42x+9$	$C = (x-1)^2-16$
$D = 49-(x+3)^2$	$E = (5x-3)^2-1$	$F = (2x+3)^2-(x-4)^2$

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 3(2x+1)(x-5)$	$B = (x^2-3)(2x^2+4)$	$C = (x+1)(x^2+x+1)$
$D = (3x^2+5)^2$	$E = (x^2-x+2)(3x-1)$	$F = (x+1)^3$

Exercice 5

Après avoir factorisé la partie de l'expression soulignée, factoriser :

$A = \underline{3x+3}-7x(x+1)$	$B = \underline{9x^2-16}-(2x+3)(3x+4)$	$C = (2x+1)(x+5)+\underline{4x^2+4x+1}$

Exercice 6

On considère les expressions suivantes :

$$A = (x^2+2x)^2 \qquad \text{et} \qquad B = (x^2+6x+8)^2$$

1. Développer A.
2. Développer B.
   On pourra utiliser le résultat suivant : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
3. Factoriser $A-B$.

Définitions

Généralités

Une `équation` est une égalité où apparaît une valeur inconnue (désignée par une lettre).
Si l'égalité est vraie pour une valeur particulière de l'inconnue alors cette valeur est une `solution` de l'équation.
`Résoudre une équation` signifie trouver toutes ses solutions.

Exemple

$7x-6=3x+2$ est une équation d'inconnue x.
Résolution de cette équation :

$$\begin{aligned}
7x-6&=3x+2 \\
7x-6-3x&=3x+2-3x && \text{On enlève } 3x \text{ à chaque membre de l'équation} \\
4x-6&=2 && \text{On simplifie chaque membre} \\
4x-6+6&=2+6 && \text{On ajoute } 6 \text{ à chaque membre de l'équation} \\
4x&=8 && \text{On simplifie chaque membre} \\
\frac{4x}{4}&=\frac{8}{4} && \text{On divise chaque membre de l'équation par } 4 \\
x&=2 && \text{On simplifie chaque membre}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $7x-6=3x+2$ est $x=2$.

Définition

Équation produit

Soient a, b, c et d quatre nombres avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
Toute équation de la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ est une `équation produit`.

Propriété

Produit nul

$(ax+b)(cx+d)=0$ équivaut à dire $ax+b=0$ ou $cx+d=0$.

Exemple

Résoudre : $(3x-9)(2x+8)=0$.
$(3x-9)(2x+8)=0$ équivaut à dire :

$$\begin{array}{rccc}
 & 3x-9=0 & \text{ou} & 2x+8=0 \\
\text{soit :} & 3x=9 & \text{ou} & 2x=-8 \\
\text{soit :} & x=3 & \text{ou} & x=-4
\end{array}$$

Les solutions de l'équation $(3x-9)(2x+8)=0$ sont : $x=3$ et $x=-4$.

Méthode

Pour résoudre certains problèmes du second degré, il est parfois utile de factoriser pour faire apparaître une équation produit.

EXERCICE 1

Résoudre les équations suivantes :

$(E_1) : 3x - 1 = -13$	$(E_2) : -2x + 5 = 8$	$(E_3) : 5x = 0$	$(E_4) : 3x - 5 = 5x + 3$
$(E_5) : 11x - 3 = 2x + 9$	$(E_6) : \dfrac{x}{7} = \dfrac{-7}{4}$	$(E_7) : (2x - 5)(3x + 2) = 0$	$(E_8) : x^2 = 50$

EXERCICE 2

On considère les deux programmes de calcul suivants :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 7.
- Multiplier par 2.

- Choisir un nombre.
- Multiplier par 6.
- Soustraire 10.

Quel nombre faut-il choisir au départ pour que les deux programmes donnent le même résultat ?

EXERCICE 3

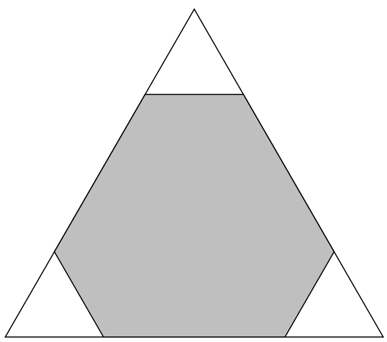
On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 3.
- Calculer le carré de cette somme.
- Soustraire 9.
- Noter le résultat obtenu.

1. Vérifier que si l'on prend 4 comme nombre de départ alors le résultat obtenu est 40.
2. Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit égal à 0 ?

EXERCICE 4

Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de côté 6 cm. La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone gris restant. Quelle est la mesure du côté des petits triangles ?



DÉFINITIONS

Une `inéquation` est une inégalité où apparaît une valeur inconnue (désignée par une lettre).
Toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vraie sont les `solutions` de cette inéquation.
`Résoudre une inéquation` signifie trouver toutes ses solutions.

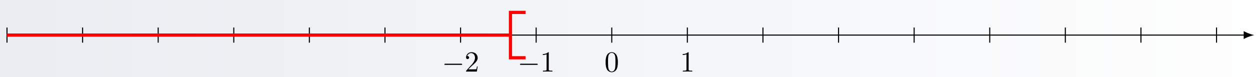
PROPRIÉTÉS

Soient a, b et c trois nombres quelconques.

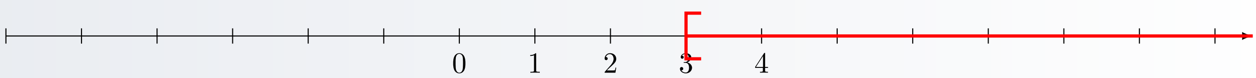
- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.
- Si $a < b$, alors :
  - Si $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
  - Si $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$ et $\frac{a}{c} > \frac{a}{c}$

EXEMPLES

1. Résoudre l'inéquation : $5x + 1 < 2x - 3$.
   $5x - 2x < -1 - 3$ (on ajoute $-2x$ et -1 aux deux membres de l'inéquation)
   $3x < -4$
   $x < -\frac{4}{3}$
   L'ensemble des solutions est donc toutes les valeurs strictement inférieures à $-\frac{4}{3}$.
   On peut représenter cet ensemble par le schéma suivant (le crochet est dirigé vers l'extérieur de l'ensemble car la valeur extrême n'est pas comprise) :



2. Résoudre l'inéquation : $-3x + 5 \leqslant -4$.
   $-3x \leqslant -4 - 5$ (on ajoute -5 à chaque membre de l'inéquation)
   $-3x \leqslant -9$
   $x \geqslant \frac{-9}{-3}$ (on change le sens de l'inégalité car on divise par le nombre négatif -3)
   $x \geqslant 3$
   L'ensemble des solutions est donc toutes les valeurs supérieures ou égales à 3 (le crochet est dirigée vers l'intérieur car la valeur extrême est comprise).



Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes :

$x - 2 \leqslant 0$	$2x + 7 > 0$	$3x - 3 < 1 - 2x$	$2(x - 8) \geqslant 8 - 3x$
$2(x + 1) < 4x + 3$	$\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1-x}{2} \geqslant 0$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{4-x}{4} > 5$	$-3(x - 2) - (7 + 3x) \leqslant 4(5 - 2x)$

Exercice 2

On donne l'inéquation $-5(1 - x) \geqslant -7(-x + 2)$ avec x entier naturel strictement positif.
Démontrer que la somme des solutions de cette inéquation est égale à 10.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation : $3t - 2\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3} + 13t$.

Exercice 4

Samir lance, devant Sophie et Léo, un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il confie à Sophie le programme de calcul suivant :

- Multiplier par 3 le résultat du lancer du dé.
- Enlever 3 au résultat ainsi obtenu.

Il confie à Léo le programme de calcul suivant :

- Ajouter 1 au résultat du lancer du dé.
- Multiplier par 2 le résultat ainsi obtenu.

Le résultat final obtenu par Sophie est supérieur à celui obtenu par Léo.
Quel est le résultat du lancer du dé ?

Exercice 5

Voici les tarifs proposés par un club de football pour les places en tribune centrale.

Formule « Occasionnelle »
30 € par match
Formule « Passfoot »
Achat d'un pass à 50 € puis 22 € par match
Formule « Abonnement »
390 € pour voir tous les matchs

Aider Théo à choisir la formule la plus avantageuse en fonction du nombre de matchs auxquels il pense assister.

Définitions

Une fonction appelée f est un processus qui, à chaque nombre x, associe une et un seul nombre noté $f(x)$, appelé l'image de x par f.
Le nombre x est un antécédent de $f(x)$ par f.

Notation

On note :

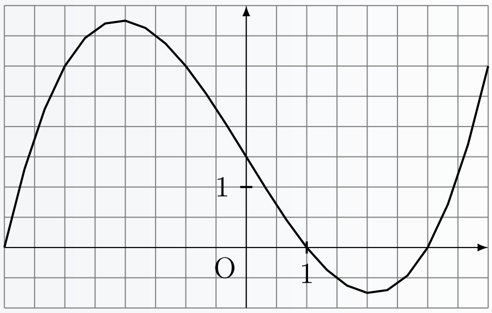
$$f : x \longmapsto f(x)$$

Définition

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction f (ou courbe représentative de f) est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Exemple 1

La courbe ci-contre définit une fonction f, qui, à chaque nombre x compris entre -4 et 3, associe le nombre $f(x)$ lu sur l'axe des ordonnées.
Ainsi : $f(-3) = 3$; $f(0) = 1,5$; $f(4) = 3$.
Les antécédents de 0 par f sont -4, 1 et 3.
Le nombre 4 n'a pas d'antécédent par f.



Exemple 2

Soit g la fonction définie par $g(x) = x(2 - x)$. On peut calculer précisément les valeurs des images voulues.
Ainsi : $g(2) = 2 \times (2 - 2) = 0$ et $g(3) = 3 \times (2 - 3) = -3$.
Les antécédents de 0 par g sont 0 et 2. En effet, $g(2) = g(0) = 0$.

Exemple 3

Le tableau de valeurs ci-dessous définit une fonction h qui, à chaque nombre de la 1^{re} ligne, associe le nombre de la 2^e ligne et de la même colonne.

x	-1	3	$3,5$	0	7	-2
$h(x)$	0	2	-2	2	-5	-1

Ainsi : $h(-1) = 0$ et $h(7) = -5$.
Les antécédents de 2 par h sont 3 et 0.

Remarque

Lorsqu'une fonction est définie par un tableau, on ne connaît qu'un nombre déterminé de valeurs d'images et d'antécédents.

EXERCICE 1

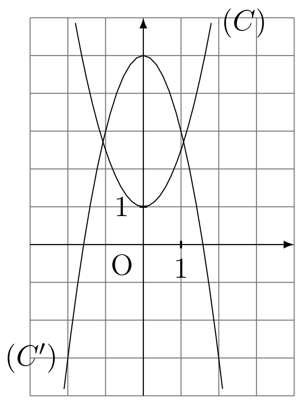
On considère une fonction f définie pour tout nombre x et telle que $f(2) = 5$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Répondre en barrant les mauvaises réponses par « VRAI », « FAUX » et « On ne peut rien dire ».

1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
7.	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
11.	5 a pour image 2 par la fonction f	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées $(2; 5)$ appartient à $\mathscr{C}$	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
13.	Le point de coordonnées $(5; 2)$ appartient à $\mathscr{C}$	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

EXERCICE 2

Sur le graphique ci-contre, la courbe (C) représente une fonction f et la courbe (C') représente une fonction g, toutes deux définies pour tout nombre x.
Répondre aux questions par lecture graphique (avec la précision permise par le tracé).

1. Quelle est l'image de 2 par la fonction g ?
2. Quels sont les antécédents de 4 par la fonction g ?
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = g(x)$? Quelle est alors l'image de ces valeurs par f et g ?



EXERCICE 3

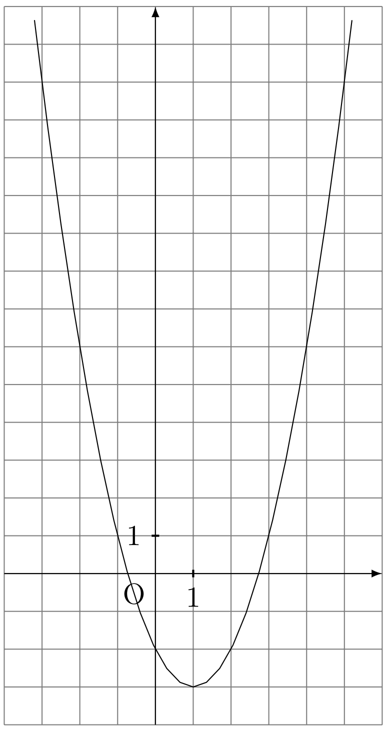
On considère les fonctions f et g définies pour tout nombre x par : $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = 4x^2$.

1. Déterminer l'image de -3 par la fonction f.
2. Déterminer l'antécédent de 24 par la fonction f.
3. Déterminer l'image de 3 par la fonction g.
4. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 8 par la fonction g.

Exercice 4

Le graphique ci-contre représenta la fonction f définie pour tout nombre x par :

$$f(x) = (x-1)^2 - 3$$



Résolution par lecture graphique :

1. Quelles sont les images de 1 et -2 par f ?
2. Quels sont les antécédents par du nombre -2 ?
3. Le nombre -3 admet-il des antécédents ? (Expliquer votre réponse).

Résolution par le calcul :

1. Calculer l'image par f de 0 et de 2 ? Quel résultat retrouve-t-on ?
2. (a) Montrer que rechercher les antécédents par f de 13 revient à résoudre l'équation : $(x-1)^2 - 16 = 0$.

   (b) Après avoir factoriser $(x-1)^2 - 16$, en déduire les antécédents de 13 par f.

Exercice 5

On considère une fonction f et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. Compléter le tableau suivant :

Égalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathscr{C}$
$f(-2) = -1$	$\ldots$ est l'image de $\ldots$ par f	$(\ldots;\ldots) \in \mathscr{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	$\ldots$ est l'image de $\ldots$ par f	$(5;7) \in \mathscr{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	4 est un antécédent de -10 par f	$(\ldots;\ldots) \in \mathscr{C}$
$f(\ldots) = \ldots$	$\ldots$ est un antécédent de $\ldots$ par f	$(-3;2) \in \mathscr{C}$

Définition

Soit a un nombre quelconque.
Si, à chaque nombre x, on peut associer son produit par a, alors on définit la `fonction linéaire` f `de coefficient` a, que l'on note $f : x \longmapsto ax$.
Une fonction linéaire de coefficient a représente une `situation de proportionnalité` dont le coefficient de proportionnalité est égal à a.
Pour calculer l'image d'un nombre par f, on le multiplie par a.

Exemple

Pourcentage

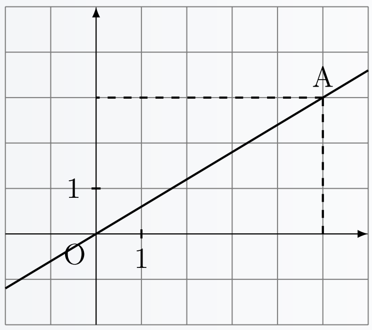
- Prendre t % d'un nombre c'est multiplier ce nombre par $\dfrac{t}{100}$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \longmapsto \dfrac{t}{100}x$.
- Augmenter une nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \longmapsto \left(1+\dfrac{t}{100}\right)x$.
- Diminuer un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \longmapsto \left(1-\dfrac{t}{100}\right)x$.

Propriété

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une `droite passant par l'origine` du repère.

Exemple

On veut représenter ci-contre la fonction linéaire f telle que $f(x) = 0,6x$.
Pour tracer la droite, passant par l'origine du repère, de cette fonction f, il faut déterminer un second point.
Pour déterminer cet autre point, il suffit de déterminer une image. L'image de 5 par exemple :
$f(5) = 0,6 \times 5 = 3$. La droite passe donc par le point A$(5;3)$.



Propriété

Pour déterminer le coefficient a d'une fonction linéaire f, il suffit une image : $a = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exemple

Le coefficient a de la fonction linéaire dont l'image de 4 est 3 est : $a = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

DÉFINITION

Soient a et b deux nombres quelconques.
Si, à chaque nombre x, on peut associer le nombre $ax+b$, alors on détermine une `fonction affine` f, que l'on notera $f : x \longmapsto ax+b$.
a est le coefficient de la fonction f et b est l'`ordonnée à l'origine`.
Pour calculer l'image d'un nombre par f, on le multiplie par a puis on ajoute b.

REMARQUES

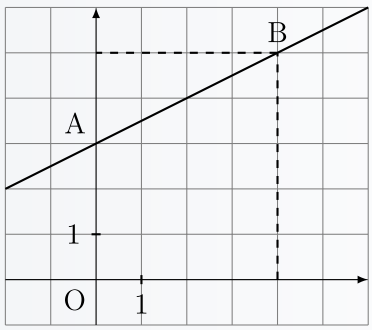
- Si $b=0$ alors la fonction f est une fonction linéaire.
- Si $a=0$ alors la fonction f est une fonction `constante`.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique de fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ est la droite passant par le point $(0;b)$.

EXEMPLE

On veut représenter ci-contre la fonction affine f définie par $f(x)=0,5x+3$.
La droite passe donc par le point A$(0;3)$.
Pour tracer la droite, il faut déterminer un second point.
Pour déterminer ce point, il suffit de déterminer une image. L'image de 4 par exemple :
$f(4)=0,5\times 4+3=5$. La droite passe par le point B$(4;5)$.



PROPRIÉTÉ

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques distincts. On a alors :

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

EXEMPLE

Déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points a$(2;5)$ et B$(4;9)$.
f est une fonction affine donc $f : x \longmapsto ax+b$.

- Calcul de a.

A$(2;5)$ appartient à la représentation graphique de f donc ses cordonnées sont de la forme $(2;f(2))$.

De même, B$(4;f(4))$.

On a alors :

$a=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{9-5}{4-2}=\dfrac{4}{2}=2$

Donc $f : x \longmapsto 2x+b$.

- Calcul de b.

$f(2)=2\times 2+b=4+b=5$

Donc $b=5-4=1$.

Ainsi : $f : x \longmapsto 2x+1$

EXERCICE 1

Démontrer que les fonctions f ci-dessous sont des fonctions affines, c'est-à-dire que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $ax+b$.

$f(x)=\dfrac{2x+6}{3}$	$f(x)=\dfrac{x+5}{2}-x$	$f(x)=(x-1)^2-x^2$	$f(x)=2(x+1)-3(x-2)$
$f(x)=(2x+1)^2-4x^2$	$f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x+5}{2}$	$f(x)=x^2+(2+x)(3-x)$	

EXERCICE 2

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes dans un même repère :

$$f : x \longmapsto 3x-2 \qquad g : x \longmapsto -3x \qquad h : x \longmapsto -2x+3$$

EXERCICE 3

Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans un même repère telles que :

a. $f(2)=2$ et $f(-1)=4$; g est constante et $g(0)=f(0)$.

b. f est linéaire et $f(2)=6$; $g(0)=3$ et $g(1)\times f(1)=0$.

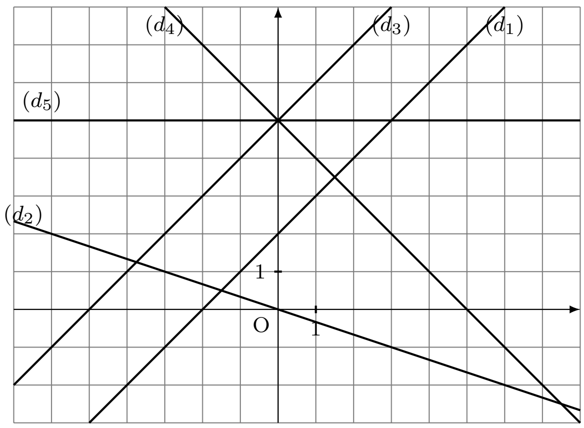
EXERCICE 4

Pour chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f.

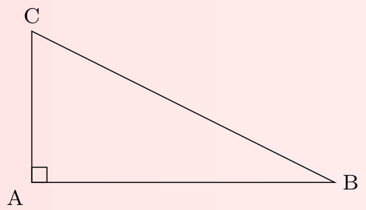
1. $f(1)=3$ et $f(4)=9$.
2. $f(-4)=1$ et $f(8)=-2$
3. A$(5;1)$ et B$(3;-3)$ sont des points de la représentation graphique de f.

EXERCICE 5

Déterminer chacune des fonctions f_1, ..., f_5 représentées respectivement par les droites (d_1), ..., (d_5).



PROPRIÉTÉ *Théorème de Pythagore*



Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

EXEMPLE

1. On considère le triangle ABC, rectangle en A, tel que AB = 4 cm et AC = 3cm. D'après le théorème de Pythagore :
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
   $BC = \sqrt{25}$
   Ainsi, $BC = 5$ cm.
2. On considère le triangle EFG, rectangle en G, tel que EF = 7 cm et EG = 5 cm. D'après le théorème de Pythagore :
   $GF^2 = EF^2 - EG^2 = 7^2 - 5^2 = 24$
   $GF = \sqrt{24}$
   Ainsi, $GF \approx 4,9$ cm.

PROPRIÉTÉ *Réciproque de Pythagore*

Soit ABC un triangle avec [BC] son plus grand côté.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

EXEMPLE

Soit ABC un triangle tel que AB = 4,5 cm ; AC = 6 cm et BC = 7,5 cm.
$[BC]$ est le plus grand côté du triangle ABC.
$BC^2 = 7,5^2 = 56,25$
$AB^2 + AC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

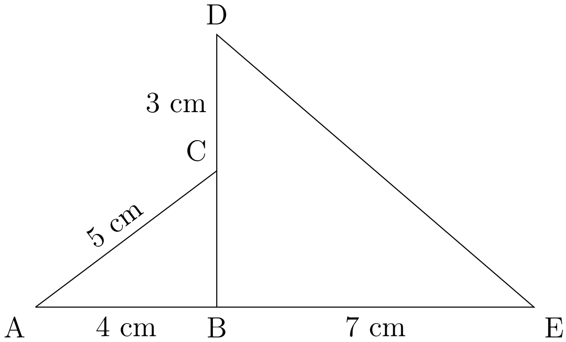
REMARQUE

On peut aussi utiliser le fait que si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle. Cette propriété s'appelle la contraposée du théorème de Pythagore.

Exercice 1

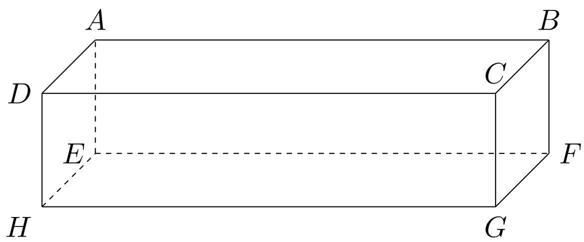
Sur le dessin ci-contre, les points A, B et E sont alignés et C est le milieu de [BD].

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. En déduire la nature du triangle BDE.
3. Calculer ED. Arrondir le résultat au dixième.



Exercice 2

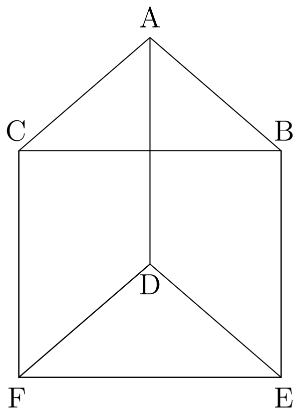
ABCDEFGH est un pavé droit tel que :
AB = 12 cm ; BF = 3 cm ; GF = 4 cm.
Calculer la longueur d'une diagonale de ce pavé droit.



Exercice 3

ABCDEF est un prisme droit tel que :
BE = EF = 5,3 cm ; DE = 2,8 cm ;
DF = 4,5 cm.
On considère la pyramide dont les sommets sont B, D, E et F.

1. Quelle est la nature de sa base ?
2. Calculer son volume.

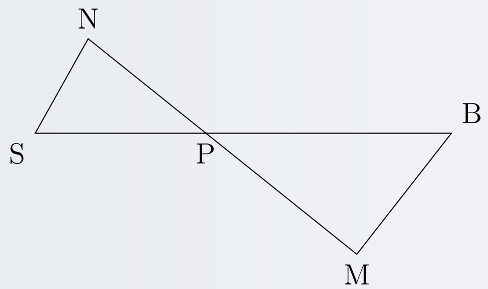


Propriété *Théorème de Thalès*

Soient (BM) et (CN) deux droites sécantes en A.
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

Exemple



Les droites (NS) et (BM) sont parallèles.
On donne : PM = 12 cm ; BM = 6,4 cm ; PB = 13,6 cm et PN = 9 cm.

Les droites (MN) et (BS) sont sécantes en P. Puisque (NS) // (BM) alors d'après le théorème de Thalès :

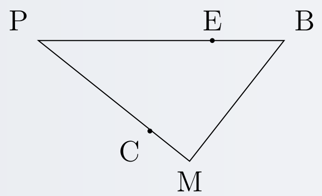
$$\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{BM}} \text{ soit } \frac{9}{12} = \frac{\mathrm{PS}}{13{,}6} = \frac{\mathrm{NS}}{6{,}4}$$

Ainsi : $\mathrm{PS} = \dfrac{9 \times 13,2}{12} = 10,2$ cm et $\mathrm{NS} = \dfrac{9 \times 6,4}{12} = 4,8$ cm.

Propriété *Réciproque de Thalès*

Soient deux droites (BM) et (CN) sécantes en A.
Si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple

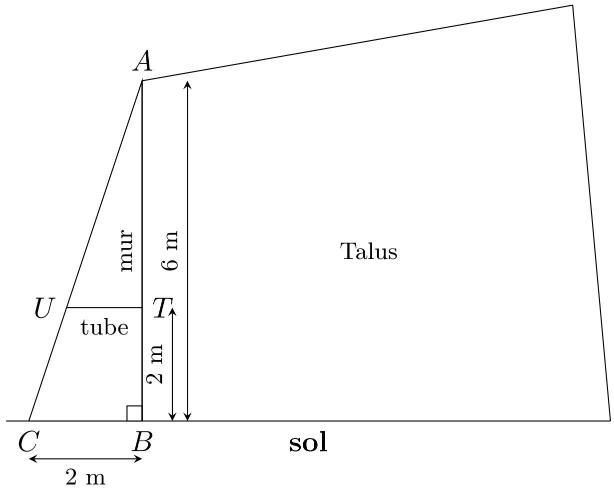


On donne : PM = 12 cm ; PB = 13,6 cm ; PE = 3,4 cm et PC = 3 cm.

Les points P, E, B d'une part et P, C, M d'autre part sont alignés dans le même ordre.
Vérifions si $\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PM}}$.
$\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{3,4}{13,6} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PM}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
Puisque $\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PM}}$ alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EC) et (BM) sont parallèles.

Exercice 1

Pour protéger le bord de son talus de 6 m de haut et de 20 m de long, M. Tino construit un mur en béton armé dont la forme est un prisme droit à base triangulaire.
Voici une coupe transversale de son talus.
Le triangle de base ABC est un triangle rectangle en B avec $BC = 2$ m et $AB = 6$ m.
Les points A, U et C sont alignés ainsi que les points A, T et B.

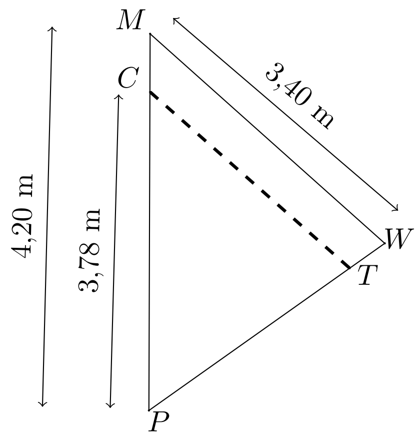


Afin d'évacuer les eaux d'infiltration, il désire placer des tubes cylindriques, perpendiculairement au talus à 2 m du sol.
Sur la figure, un de ces tubes est représenté par le segment $[UT]$.

1. (a) Calculer la longueur UT en mètre.
   (b) Montrer que la valeur approchée par excès au cm près de UT est 1,34 m.
2. Montrer que le volume de béton nécessaire pour réaliser ce mur est de 120 m^3.
3. Sachant que la masse volumique de ce béton est de 2,5 t/m^3 (tonne par mètre cube), quelle est la masse totale du béton utilisé ?

Exercice 2

Un centre nautique souhaite effectuer une réparation sur une voile.
La voile a la forme du triangle PMW ci-contre.

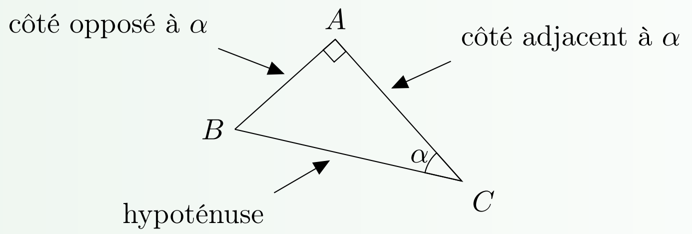


1. On souhaite faire une couture suivant le segment [CT].
   a. Si (CT) est parallèle à (MW), quelle sera la longueur de cette couture ?
   b. La quantité de fil nécessaire est le double de la longueur de la couture.
   Est-ce que 7 mètres de fil suffiront ?
2. Une fois la couture terminée, on mesure :
   PT = 1,88 m et PW = 2,30 m.
   La couture est-elle parallèle à (MW) ?

DÉFINITIONS

Soit ABC un triangle rectangle en A, on note α l'angle aigu $\widehat{ACB}$. On a alors :

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \quad \sin\ \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} \quad \tan\ \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$



REMARQUES

- Si α est un angle aigu d'un triangle rectangle alors $0 < \cos\ \alpha < 1$ et $0 < \sin\ \alpha < 1$.
- Voici un moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions :

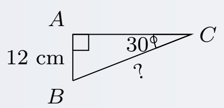
CAHSOHTOA

Cosinus **A**djacent **H**ypoténuse **S**inus **O**pposé **H**ypoténuse **T**angente **O**pposé **A**djacent

On peut aussi retenir le mot **SOHCAHTOA**.

EXEMPLES

Calculer des longueurs

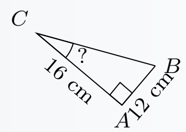


Dans le triangle ABC rectangle en A : $\sin\ \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$.

Donc $\sin\ 30° = \dfrac{12}{BC}$.

D'où $BC = \dfrac{12}{\sin\ 30°} = 24$ cm.

Calculer des mesures d'angles



Dans le triangle ABC rectangle en A : $\tan\ \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$.

Donc $\tan\ \widehat{ACB} = \dfrac{12}{16}$.

D'où $\widehat{ACB} \approx 36,9°$.

PROPRIÉTÉS

α étant la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle, on a :

$$\cos^2\ \alpha + \sin^2\ \alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \tan\ \alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

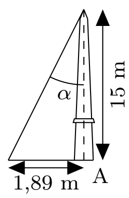
REMARQUE

On écrit $\cos^2\ \alpha$ pour $(\cos\alpha)^2$ pour éviter la confusion avec $\cos\ \alpha^2$.

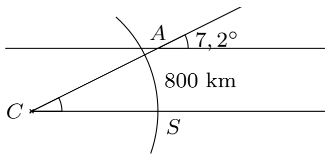
EXERCICE 1

Trois siècle avant J.C., le mathématicien grec Ératosthène réussit à calculer la circonférence de la Terre.
Il avait constaté que le jour du solstice d'été, à midi, les rayons du Soleil étaient verticaux à Syène (haute-Égypte) alors qu'au même moment, ils étaient légèrement inclinés à Alexandrie.
D'après les relevés de cette époque, la distance entre Alexandrie et Syène était d'environ 800 km. De plus, sur une place d'Alexandrie, la longueur d'un obélisque et de son ombre suffisait à calculer l'angle d'inclinaison des rayons du Soleil.
Grâce à ces trois mesures, Ératosthène put aussi donner une estimation correcte de la longueur du tour de la Terre.
Voici comment :

1. Calcul de l'angle d'inclinaison des rayons du Soleil.
   La figure ci-contre représente l'obélisque situé à Alexandrie.
   La figure n'est pas à l'échelle.
   Calculer, à partir des indications sur cette figure, l'angle α d'inclinaison des rayons du Soleil.
   Montrer que $\alpha \approx 7,2°$.



2. À partir des données de la figure ci-dessous et en considérant que les rayons du Soleil sont parallèles :



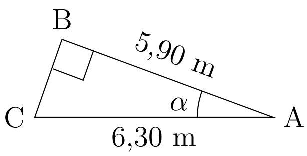
   (a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACS}$.

   (b) En déduire, en utilisant la proportionnalité, la circonférence de la Terre.

EXERCICE 2

Dans un camion à benne, un vérin permet le vidage de la benne par basculement.
Le châssis et la benne forment un angle α.
Pour que le vidage soit complet, on doit avoir $\alpha > 45°$.
On considère que le châssis et la benne forment un triangle ABC, où [AB] représente la benne, [BC] représente le vérin et [AC] représente le châssis.
On sait que AB = 5,90 m et AC = 6,30 m.

1. On considère dans cette question que le vérin et la benne sont perpendiculaires. On représente la situation par le schéma ci-dessous.

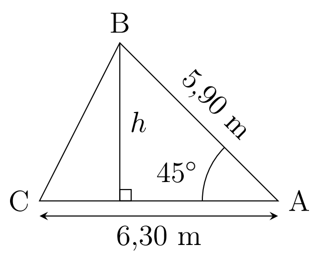


   L'angle α permet-il un vidage complet de la benne ?

2. On considère maintenant que $\alpha = 45°$.

   (a) Calculer l'arrondi au cm de la distance h entre le châssis du camion et la partie haute de la benne.

   (b) Calculer l'arrondi au cm de la longueur BC du vérin.



Propriété

Formules d'aires

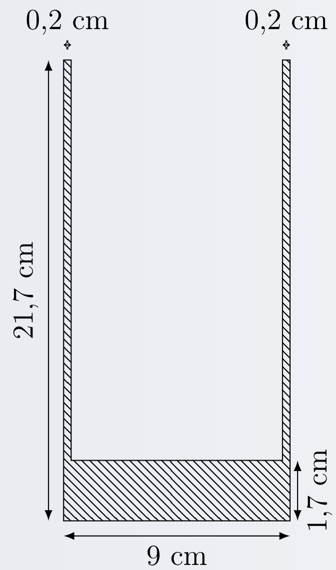
Figure usuelle	Dimensions	Aire
Carré	côté a	a^2
Rectangle	longueur L et largeur l	$L \times l$
Triangle	base b et hauteur h	$\dfrac{b \times h}{2}$
Parallélogramme	base b et hauteur h	$b \times h$
Losange	diagonales D et d	$\dfrac{D \times d}{2}$
Trapèze	bases B et b, hauteur h	$\dfrac{(B+b) \times h}{2}$
Disque	rayon r	$\pi \times r^2$
Sphère	rayon r	$4\pi \times r^2$
Cylindre de révolution	rayon de base r et hauteur h	latérale : $2\pi \times r \times h$

Propriété

Formules de volumes

Figure usuelle	Dimensions	Volume
Cube	arête a	a^3
Pavé droit	longueur L, largeur l et hauteur h	$L \times l \times h$
Prisme droit	aire de la base B et hauteur h	$B \times h$
Cylindre de révolution	rayon de base r et hauteur h	$\pi \times r^2 \times h$
Pyramide	aire de base B et hauteur h	$\dfrac{B \times h}{3}$
Cône de révolution	rayon de base r et hauteur h	$\dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$
Boule	rayon r	$\dfrac{4}{3} \times \pi \times r^3$

Exemple



On remplit le vase représenté ci-contre, qui a la forme d'un pavé droit, avec des billes de diamètre 1,8 cm.
Peut-on y ajouter un litre d'eau colorée sans risquer le débordement ?

Le pavé a pour base un carré de côtés $9 - 2 \times 0,2 = 8,6$ cm et de hauteur $21,7 - 1,7 = 20$ cm.
$V(\text{vase}) = 8,6 \times 8,6 \times 20 = 1\ 479,2$ cm^3
$V(1 \text{ bille}) = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 0,9^3 = 0,972\pi$ cm^3
$V(150 \text{ billes}) = 150 \times 0,972\pi = 145,8\pi$ cm^3
$V(\text{restant dans le vase}) = 1\ 479,2 - 145,8\pi \approx 1\ 021,16$ cm^3
1 L = 1 000 cm^3.
Puisque $1\ 021,16 > 1\ 000$ alors on pourra ajouter un litre d'eau coloré dans le vase sans risquer le débordement.

Corrigé des fiches d'exercices

de la 3^e à la 2^{nde}

Collège Claude Monet

Exercice 1

$A = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7+1}{3} = \dfrac{8}{3}$

$B = \dfrac{3}{5} - \dfrac{17}{15} = \dfrac{3\times 3}{5\times 3} - \dfrac{17}{15} = \dfrac{9}{15} - \dfrac{17}{15} = \dfrac{9-17}{15} = -\dfrac{8}{15}$

$C = \dfrac{-7}{8} \times \dfrac{4}{21} = \dfrac{-7\times 4}{8\times 21} = \dfrac{-7\times 4}{2\times 4\times 3\times 7} = -\dfrac{1}{6}$

$D = \dfrac{-3}{7} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{-3}{7} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{-3\times 5}{7\times 4} = -\dfrac{15}{28}$

Exercice 2

$E = \left(\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7}\right) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{5\times 1}{7\times 5} = \dfrac{1}{7}$

$F = \left(\dfrac{1}{2} - 6\right) \times \left(\dfrac{1}{2} - 2\right) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{12}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{2}\right) = \dfrac{-11}{2} \times \dfrac{-3}{2} = \dfrac{33}{4}$

$G = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{7}}{2 - \dfrac{1}{4}} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{7}\right) \div \left(2 - \dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{7}{14} + \dfrac{6}{14}\right) \div \left(\dfrac{8}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{13}{14} \div \dfrac{7}{4} = \dfrac{13}{14} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{13\times 4}{14\times 7} = \dfrac{52}{98} = \dfrac{26}{49}$

Exercice 3

1. $A = 3 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{21}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7}$

   $B = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15}} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{105}{15} + \dfrac{1}{15}} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{106}{15}} = 3 + \dfrac{15}{106} = \dfrac{333}{106}$

   $C = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + \dfrac{1}{1}}} = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{16}} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{113}{16}} = 3 + \dfrac{16}{113} = \dfrac{355}{113}$

2. $A \approx 3,1429$; $B \approx 3,1415$; $C \approx 3,1416$
3. Le nombre est π.

Exercice 4

Si Léa a mangé $\dfrac{1}{4}$ du paquet de gâteaux alors il en reste les $\dfrac{3}{4}$.

Agathe a mangé $\dfrac{2}{3}$ des $\dfrac{3}{4}$ du paquet soit : $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ du paquet.

À eux deux, elles ont donc mangé : $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{4}$ du paquet.

Il reste alors $1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ du paquet, ce qui représente 5 gâteaux.

Le paquet contenait ainsi : $5 \times 4 = 20$ gâteaux au départ.

Exercice 5

$H = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{x+2}{x(x+2)} + \dfrac{3x}{x(x+2)} = \dfrac{x+2+3x}{x(x+2)} = \dfrac{4x+2}{x(x+2)} = \dfrac{4x+2}{x^2+2x}$

$I = \dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{2}{5x} = \dfrac{3x\times 5x}{5x(x+1)} + \dfrac{2(x+1)}{5x(x+1)} = \dfrac{15x^2+2(x+1)}{5x(x+1)} = \dfrac{15x^2+2x+2}{5x^2+5x}$

$J = 5 + \dfrac{3}{2+x} = \dfrac{5(2+x)}{2+x} + \dfrac{3}{2+x} = \dfrac{5(2+x)+3}{2+x} = \dfrac{10+5x+3}{2+x} = \dfrac{5x+13}{2+x}$

$K = \dfrac{1}{2-3x} - \dfrac{1}{2+3x} = \dfrac{2+3x}{(2-3x)(2+3x)} - \dfrac{2-3x}{(2-3x)(2+3x)} = \dfrac{2+3x-(2-3x)}{(2-3x)(2+3x)} = \dfrac{2+3x-2+3x}{(2-3x)(2+3x)} = \dfrac{6x}{(2-3x)(2+3x)} = \dfrac{6x}{4-9x^2}$

EXERCICE 1

x	$\dfrac{1}{10^3}$	5^{-2}	$(-1)^{17}$	$(-2)^3$	$78,85 \times 10^5$
Écriture décimale de x	$0,001$	$0,04$	-1	-8	$7\ 885\ 000$

EXERCICE 2

x	$2^3 \times 2^4$	$3^{-9} \times 3^5$	$6^2 \times 6^5 \times 6^{-4}$	$\dfrac{5^{-3}}{5^2}$	$\left((-3)^5\right)^2$	$5^4 \times 2^4$
Écriture de x sous forme d'une seule puissance	2^7	3^{-4}	6^3	5^{-5}	$(-3)^{10}$	10^4

EXERCICE 3

$A = 3\ 780\ 000 = 3,78 \times 10^6$

$B = 123,8 \times 10^{-5} = 1,238 \times 102 \times 10^{-5} = 1,238 \times 10^{-3}$.

EXERCICE 4

1. $m = 1,99 \times 10^{-26} \times 6,022 \times 10^{23} = 11,98378 \times 10^{-3} = 1,198378 \times 10^{-2}$ kg
2. $1,198378 \times 10^{-2}$ kg $= 0,01198378$ kg ≈ 12 g

EXERCICE 5

$A = (a^{-2})^3 = a^{-6}$

$B = (a^{-5}b^2)^{-1} \times ab^{-3} = a^5 \times b^{-2} \times a \times b^{-3} = a^6b^{-5}$

$C = \dfrac{a^5b^{-4}}{a^{-5}b^{-2}} = \dfrac{a^5}{a^{-5}} \times \dfrac{b^{-4}}{b^{-2}} = a^{10} \times b^{-2} = a^{-10}b^{-2}$

$D = -2x^3 \times 5x \times 3^{-2} \times x^{-5} = (-2 \times 5 \times 3^{-2}) \div (x^3 \times x \times x^{-5}) = -\dfrac{10}{9}x^{-1} = -\dfrac{10}{9} \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{9x}$

$E = (-2x^5)^3 = (-2)^3 \times x^{5\times 3} = -8x^{15}$

$F = \dfrac{ab^{-3} \times (a^{-2}b^3) \times (ab^{-1})^2}{(ab^2)^{-1} \times ab} = \dfrac{ab^{-3} \times a^{-2}b^3 \times a^2b^{-2}}{a^{-1}b^{-2} \times ab} = \dfrac{a \times a^{-2} \times a^2}{a^{-1} \times a} \times \dfrac{b^{-3} \times b^3 \times b^{-2}}{b^{-2} \times b} = \dfrac{a}{a^0} \times \dfrac{1}{b} = a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$

Exercice 1

$\sqrt{(-3)^2} = 3$ $\quad (-\sqrt{3})^2 = (-1)^2 \times (\sqrt{3})^2 = 3$ $\quad \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times (\sqrt{3})^2 = \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$

$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 - 5 = -4$

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times (\sqrt{3})^2 = 6$ $\quad \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ $\quad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \sqrt{7+42} = \sqrt{49} = 7$

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Exercice 2

$\sqrt{2}(3\sqrt{25}) = 3(\sqrt{2})^2 - 5\sqrt{2} = 6 - 5\sqrt{2}$

$\sqrt{((-3)+2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{81-49}}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{42}{8}} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

$AB = \sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{54} - \sqrt{24} = \sqrt{9 * 6} - \sqrt{4 * 6} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$

$[BC]$ est le plus grand côté du triangle ABC.

$BC^2 = (\sqrt{11})^2 = 11$

$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6})^2 = 5 + 6 = 11$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 4

$A\frac{7}{\sqrt{5}-2} - \frac{7}{\sqrt{5}+2} = \frac{7(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \frac{7(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{7(\sqrt{5}+2) - 7(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{7\sqrt{5}+14-7\sqrt{5}+14}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} =$
$\frac{28}{1} = 28$

$B = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4}{1} = 4$

Exercice 5

1. $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
   $\Phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
   Donc $\Phi^2 = \Phi + 1$. Ainsi Φ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$.
2. $b = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{\Phi^2}} = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 6

1. $A_1 = (\sqrt{3}+3)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 3 + 3^2 = 12 + 6\sqrt{3}$ cm^2.
2. $A_2 = \sqrt{2}(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}) = \sqrt{144} + 3\sqrt{12} = 12 + 3\sqrt{12}$ cm^2.
3. $12 + 3\sqrt{12} = 12 + 3\sqrt{4 \times 3} = 12 + 3 \times 2\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3}$. Donc $A_1 = A_2$.

EXERCICE 1

$A = (2x-3)(5x-4) = 2x \times 5x + 2x \times (-4) + (-3) \times 5x + (-3) \times (-4) = 10x^2 - 8x - 15x + 12 = 10x^2 - 23x + 12$
$B = 2x(5x-3) = 2x \times 5x + 2x \times (-3) = 10x^2 - 6x$
$C = 3x - (x-1) - (x+7)(x+3) = 3x - x + 1 - (x^2 + 10x + 21) = 2x + 1 - x^2 - 10x + 21 = -x^2 - 8x + 22$
$D = x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
$E = (6+7x)(6-7x) = 6^2 - (7x)^2 = 36 - 49x^2$
$F = (4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$

EXERCICE 2

$A = x^2 + 2x = \underline{x} \times x + 2 \times \underline{x} = x(x+2)$
$B = 7x\underline{(x-4)} + \underline{(x-4)}^2 = (x-4)[7x + (x-4)] = (x-4)(7x + x - 4) = (x-4)(8x-4)$
$C = \underline{(x+1)}(2x+5) - \underline{(x+1)}(3x+4) = (x+1)[(2x+5) - (3x+4)] = (x+1)(2x+5-3x-4) = (x+1)(-x+1)$
$D = 9u^2 + 3u = \underline{3} \times 3 \times \underline{u} \times u + \underline{3} \times \underline{u} \times 1 = 3u(3u+1)$
$E = (2-t)\underline{(3t+1)} + \underline{(3t+1)} = (3t+1)(2-t+1) = (3t+1)(3-t)$
$F = \underline{(2x-3)}^2 - \underline{(2x-3)}(x+7) = (2x-3)[(2x-3) - (x+7)] = (2x-3)(2x-3-x-7) = (2x-3(x-10)$

EXERCICE 3

$A = 81 - 64t^2 = 9^2 - (8t)^2 = (9-8t)(9+8t)$
$B = 49x^2 - 42x + 9 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2 = (7x-3)^2$
$C = (x-1)^2 - 16 = (x-1)^2 - 4^2 = [(x-1) - 4][(x-1) + 4] = (x-5)(x+3)$
$D = 49 - (x+3)^2 = 7^2 - (x+3)^2 = [7 - (x+3)][7 + (x+3)] = (7-x-3)(7+x+3) = (4-x)(x+10)$
$E = (5x-3)^2 - 1 = (5x-3)^2 - 1^2 = [(5x-3) - 1][(5x-3) + 1] = (5x-3-1)(5x-3+1) = (5x-4)(5x-2)$
$F = (2x+3)^2 - (x-4)^2 = [(2x+3) - (x-4)][(2x+3) + (x-4)] = (2x+3-x+4)(2x+3+x-4) = (x+7)(3x-1)$

EXERCICE 4

$A = 3(2x+1)(x-5) = 3(2x^2 - 10x + x - 5) = 6x^2 - 30x + 3x - 15 = 6x^2 - 27x - 15$
$B = (x^2-3)(2x^2+4) = x^2 \times 2x^2 + x^2 \times 4 + (-3) \times 2x^2 + (-3) \times 4 = 2x^4 + 4x^2 - 6x^2 - 12 = 2x^4 - 2x^2 - 12$
$C = (x+1)(x^2+x+1) = x \times x^2 + x \times x + x \times 1 + 1 \times x^2 + 1 \times x + 1 \times 1 = x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$D = (3x^2+5)^2 = (3x^2)^2 + 2 \times 3x^2 \times 5 + 5^2 = 9x^4 + 30x^2 + 25$
$E = (x^2-x+2)(3x-1) = x^2 \times 3x + x^2 \times (-1) + (-x) \times 3x + (-x) \times (-1) + 2 \times 3x + 2 \times (-1) = 3x^3 - x^2 - 3x^2 + x + 6x - 2 = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$
$F = (x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

EXERCICE 5

$A = \underline{3x+3} - 7x(x+1) = 3(x+1) - 7x(x+1) = (x+1)(3-7x)$
$B = \underline{9x^2 - 16} - (2x+3)(3x+4) = (3x-4)(3x+4) - (2x+3)(3x+4) = (3x+4)[(3x-4) - (2x+3)] = (3x+4)(x-7)$
$C = (2x+1)(x+5) + \underline{4x^2 + 4x + 1} = (2x+1)(x+5) + (2x+1)^2 = (2x+1)[(x+5) + (2x+1)] = (2x+1)(3x+6)$

EXERCICE 6

1. $A = (x^2+2x)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times x + (2x)^2 = x^4 + 2x^3 + 4x^2$
2. $B = (x^2+6x+8)^2 = (x^2)^2 + (6x)^2 + 8^2 + 2 \times x^2 \times 6x + 2 \times x^2 \times 8 + 2 \times 6x \times 8 = x^4 + 36x^2 + 64 + 12x^3 + 16x^2 + 96x = x^4 + 12x^3 + 52x^2 + 96x + 64$
3. $A - B = (x^2+2x)^2 - (x^2+6x+8)^2 = [(x^2+2x) - (x^2+6x+8)][(x^2+2x) + (x^2+6x+8)] = (x^2 + 2x - x^2 - 6x - 8)(x^2 + 2x + x^2 + 6x + 8) = (-4x-8)(2x^2+8x+8)$

Exercice 1

$$\begin{aligned}3x-1&=-13\\3x&=-12\\x&=-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2x+5&=8\\-2x&=3\\x&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5x&=0\\x&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x-5&=5x+3\\3x&=5x+8\\-2x&=8\\x&=-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}11x-3&=2x+9\\11x&=2x+12\\9x&=12\\x&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{7}&=\frac{-7}{4}\\x&=\frac{-7\times 7}{4}\\x&=-\frac{49}{4}\end{aligned}$$

$(2x-5)(3x+2)=0$ équivaut à :

$2x-5=0$ ou $3x+2=0$

Donc : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{2}{3}$

$$x^2=50$$

$50>0$ donc $x^2=50$ équivaut à $x=\sqrt{50}$ et $x=-\sqrt{50}$ soit $x=5\sqrt{2}$ et $x=-5\sqrt{2}$

Exercice 2

On note x le nombre choisi au départ pour les deux programmes. On a alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned}2(x+7)&=6x-10\\2x+14&=6x-10\\2x&=6x-24\\-4x&=-24\\x&=6\end{aligned}$$

Il faut donc choisir 6 comme nombre de départ pour que les deux programmes donnent le même résultat.

Exercice 3

1. $(4+3)^2-9=7^2-9=49-9=40$
2. Soit x le nombre choisi au départ. Le programme de calcul se traduit par la formule suivante : $(x+3)^2-9$.
   On a alors l'équation : $(x+3)^2-9=0$.

$$\begin{aligned}(x+3)^2-9&=0\\(x+3)^2-3^2&=0\\[(x+3)-3][(x+3)+3]&=0\\x(x+6)&=0\end{aligned}$$

Cette équation équivaut à : $x=0$ ou $x+6=0$ soit $x=0$ ou $x=-6$.
Pour obtenir 0 comme résultat, il faut donc choisir 0 ou -6 comme nombre de départ.

Exercice 4

On note x la longueur du côté des petits triangles.
Les longueurs des côtés de l'hexagone sont x et $6-2x$.
p(3 triangles) $=9x$ et p(hexagone) $=3x+3(6-2x)=-3x+18$.
On a alors : $9x=-3x+18$ soit $12x=18$ soit $x=1,5$ cm.
Les petits triangles ont pour côté 1,5 cm.

EXERCICE 1

$x - 2 \leqslant 0$
$x \leqslant 2$

$2x + 7 > 0$
$2x > -7$
$x > -\frac{7}{2}$

$3x - 3 < 1 - 2x$
$3x < 4 - 2x$
$5x < 4$
$x < \frac{5}{4}$

$2(x-8) \geqslant 8 - 3x$
$2x - 16 \geqslant 8 - 3x$
$2x \geqslant 24 - 3x$
$5x \geqslant 24$
$x \geqslant \frac{24}{5}$

$2(x+1) < 4x + 3$
$2x + 2 < 4x + 3$
$2x < 4x + 1$
$-2x < 1$
$x > -\frac{1}{2}$

$\frac{x-2}{3} - \frac{1-x}{2} \geqslant 0$
$\frac{2(x-2)}{6} - \frac{3(1-x)}{6} \geqslant 0$
$\frac{2(x-2) - 3(1-x)}{6} \geqslant 0$
$2(x-2) - 3(1-x) \geqslant 0$
$5x - 7 \geqslant 0$
$x \geqslant \frac{7}{5}$

$\frac{x}{2} - \frac{4-x}{4} > 5$
$\frac{2x}{4} - \frac{4-x}{4} > 5$
$\frac{2x - (4-x)}{4} > 5$
$2x - 4 + x > 20$
$3x > 24$
$x > 8$

$-3(x-2) - (7+3x) \leqslant 4(5-2x)$
$-6x - 1 \leqslant 20 - 8x$
$-6x \leqslant 21 - 8x$
$2x \leqslant 21$
$x \leqslant \frac{21}{2}$

EXERCICE 2

$-5(1-x) \geqslant -7(-x+2)$ équivaut à $-5 + 5x \geqslant 7x - 14$ soit $5x \geqslant 7x - 9$ donc $-2x \geqslant -9$ d'où $x \leqslant 4,5$.
Puisque x est un entier strictement positif, les valeurs possibles pour x sont : 1 ; 2 ; 3 et 4.
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ donc la somme des solutions de cette inéquation est égale à 10.

EXERCICE 3

$3t - 2\sqrt{3} \geqslant 3\sqrt{3} + 13t$ équivaut à $3t \geqslant 5\sqrt{3} + 13t$ soit $-10t \geqslant 5\sqrt{3}$ donc $t \leqslant \frac{5\sqrt{3}}{-10}$ d'où $x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 4

On note n le résultat du lancer du dé.
Programme de Sophie : $3n - 3$
Programme de Léo : $2(n+1) = 2n + 2$.
On obtient alors l'inéquation $3n - 3 > 2n + 2$.
$3n - 3 > 2n + 2$ équivaut à $3n > 2n + 5$ soit $n > 5$.
Ainsi le résultat du lancer du dé est 6.

EXERCICE 5

On note x le nombre de matchs auxquels pense assister Théo. Formule Occasionnelle : $30x$
Formule Passfoot : $22x + 50$
Formule Abonnement : 390

On compare la formule Occasionnelle et la formule Passfoot. $30x < 22x + 50$ équivaut à $8x < 50$ soit $x < 6,25$.

On compare la formule Passfoot avec la formule Abonnement. $22x + 50 < 390$ équivaut $22x < 340$ soit $x < \frac{340}{22}$ et $\frac{340}{22} \approx 15,45$.

En résumé :
De 0 à 6 matchs, la formule « Occasionnelle » est la plus avantageuse.
De 7 à 15 matchs, la formule « Passffot » est la plus avantageuse.
À partir de 16 matchs, la formule « Abonnement » est la plus avantageuse.

EXERCICE 1

1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI
7.	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2.	FAUX
8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f	FAUX
11.	5 a pour image 2 par la fonction f	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées $(2;5)$ appartient à $\mathscr{C}$	VRAI
13.	Le point de coordonnées $(5;2)$ appartient à $\mathscr{C}$	On ne peut rien dire

EXERCICE 2

1. $g(2) = -3$
2. Les antécédents de 4 par g sont environ $-0,8$ et $0,8$.
3. $f(x) = g(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.
   L'image de ces valeurs est 3.

EXERCICE 3

1. $f(-3) = 2 \times (-3) - 4 = -6 - 4 = -10$.
   L'image de -3 par f est -10.
2. On cherche x tel que $f(x) = 24$.
   $f(x) = 24$ équivaut à $2x - 4 = 24$ soit $2x = 28$ soit $x = 14$
   L'antécédent de 24 par f est 14.
3. $g(3) = 4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
   L'image de 3 par g est 36.
4. On cherche x tel que $g(x) = 8$.
   $g(x) = 8$ équivaut à $4x^2 = 8$ soit $x^2 = 2$.
   $2 > 0$ donc $x^2 = 2$ équivaut à $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$.
   Les antécédents de 8 par g sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

EXERCICE 4

Résolution par lecture graphique :

1. $f(1) = -3$ et $f(-2) = 6$
2. Les antécédents de -2 par f sont 0 et 2
3. Le nombre -3 admet 1 pour antécédent.

Résolution par le calcul :

1. $f(0) = (0-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
   $f(2) = (2-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
   On retrouve les résultats de la question 2. précédente.

2. (a) $f(x) = 13$ équivaut à $(x-1)^2 - 3 = 13$ soit $(x-1)^2 - 16 = 0$.

   (b) $(x-1)^2 - 16 = 0$
   $(x-1)^2 - 4^2 = 0$
   $[(x-1)-4][(x-1)+4] = 0$
   $(x-5)(x+3) = 0$
   $x - 5 = 0$ ou $x + 3 = 0$
   $x = 5$ ou $x = -3$
   Les antécédents de 13 par f sont -3 et 5.

Exercice 5

Égalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathscr{C}$
$f(-2) = -1$	-1 est l'image de -2 par f	$(-2; -1) \in \mathscr{C}$
$f(5) = 7$	7 est l'image de 5 par f	$(5; 7) \in \mathscr{C}$
$f(4) = -10$	4 est un antécédent de -10 par f	$(4; -10) \in \mathscr{C}$
$f(-3) = 2$	-3 est un antécédent de 2 par f	$(-3; 2) \in \mathscr{C}$

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{2x+6}{3} = \dfrac{2}{3}x + 2$

$f(x) = \dfrac{x+5}{2} - x = 0,5x + 2,5 - x = -0,5x + 2,5$

$f(x) = (x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$

$f(x) = 2(x+1) - 3(x-2) = 2x + 2 - 3x + 6 = -x + 8$

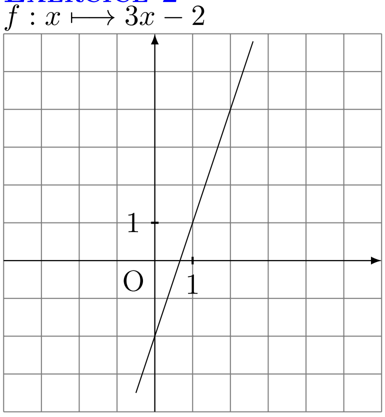
$f(x) = (2x+1)^2 - 4x^2 = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 = 4x + 1$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} = x + \dfrac{5}{2}$

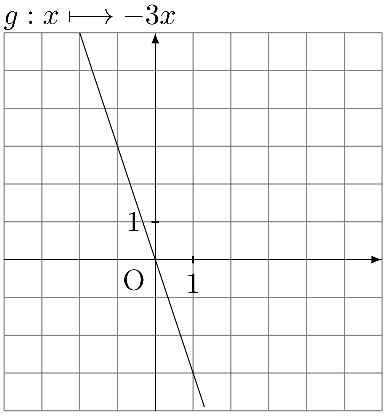
$f(x) = x^2 + (2+x)(3-x) = x^2 + 6 - 2x + 3x - x^2 = x + 6$

EXERCICE 2

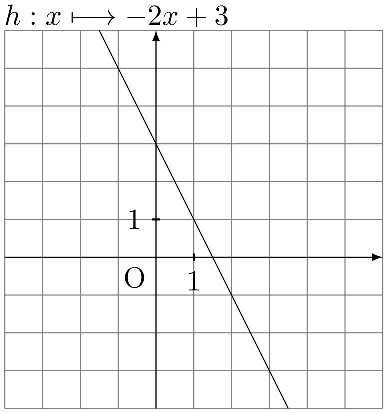
$f : x \longmapsto 3x - 2$



$g : x \longmapsto -3x$

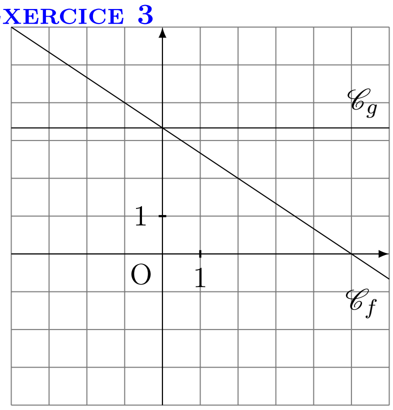


$h : x \longmapsto -2x + 3$

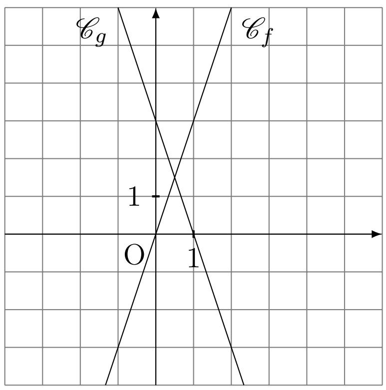


EXERCICE 3

a.



b.



EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction affine donc $f : x \longmapsto ax + b$.

1. Calcul de a :
   $a = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{9 - 3}{4 - 1} = 2$
   $f(1) = 3$ donc $2 \times 1 + b = 3$ d'où $b = 1$.
   Ainsi : $f : x \longmapsto 2x + 1$.
2. $a = \dfrac{f(8) - f(-4)}{8 - (-4)} = \dfrac{-2 - 1}{8 - (-4)} = -\dfrac{1}{4}$
   $f(-4) = 1$ donc $-\dfrac{1}{4} \times (-4) + b = 1$ d'où $b = 0$.
   Ainsi : $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{4}x$. f est une fonction linéaire.
3. $\mathrm{A}(5; 1) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(5) = 1$.
   $\mathrm{B}(3; -3) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(3) = -3$.
   $a = \dfrac{f(3) - f(5)}{3 - 5} = \dfrac{-3 - 1}{3 - 5} = 2$

$f(5) = 1$ donc $2 \times 5 + b = 1$ d'où $b = -9$. Ainsi $f : x \longmapsto 2x - 9$

Exercice 5

$f_1(x) = x + 2$

$f_2(x) = -\dfrac{1}{3}x$

$f_3(x) = x + 5$

$f_4(x) = -x + 5$

$f_5(x) = 5$

Exercice 1

1. $[AC]$ est le plus grand côté du triangle ABC.
   $AC^2 = 5^2 = 25$
   $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 254$
   $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
2. Les points A, B et E étant alignés, le triangle BDE est rectangle en B.
3. BDE est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
   $ED^2 = EB^2 + BD^2 = 7^2 + 6^2 = 85$
   Ainsi : $ED = \sqrt{85} \approx 9,2$ cm.

Exercice 2

Calcul de EG :
Le triangle EFG est rectangle en F donc d'après le théorème de Pythagore :
$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 12^2 + 4^2 = 160$
Ainsi : $EG = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ cm.

Calcul de AG :
Le triangle AEG est rectangle en E donc d'après le théorème de Pythagore :
$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 3^2 + (4\sqrt{10})^2 = 169$.
Ainsi : $AG = \sqrt{169} = 13$ cm.

Exercice 3

1. $[EF]$ est le plus grand côté du triangle DEF.
   $EF^2 = 5,3^2 = 28,09$
   $ED^2 + DF^2 = 2,8^2 + 4,5^2 = 28,09$
   $EF^2 = ED^2 + DF^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, DEF est rectangle en D.
2. $A(DEF) = \dfrac{4,5 \times 2,8}{2} = 6,3$ cm^2.
   $V(ABCDEF) = 6,3 \times 5,3 = 33,39$ cm^3.

Exercice 1

1. (a) Dans le triangle ABC, $T \in [AB]$, $U \in [AC]$ et $(UT)//(BC)$.
   D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AU}{AC} = \dfrac{AT}{AB} = \dfrac{UT}{BC}$ soit $\dfrac{4}{6} = \dfrac{UT}{2}$
   Ainsi : $UT = \dfrac{2 \times 4}{6} = \dfrac{4}{3}$ m.

   (b) $UT = \dfrac{4}{3} \approx 1,34$ m.

2. $A(ABC) = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$ m^2.
   $V(\text{béton}) = 6 \times 20 = 120$ m^3.

3. $m = 2,5 \times 120 = 300$ t.

Exercice 2

1. (a) Dans le triangle PMW, T ∈ [PW], C ∈ [PM] et (CT) // (MW).
   D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{PT}{PW} = \dfrac{CT}{MW}$ soit $\dfrac{3,78}{4,20} = \dfrac{PT}{PW} = \dfrac{CT}{3,40}$.
   D'où $CT = \dfrac{3,40 \times 3,78}{4,20} = 3,06$ m.

   (b) $3,06 \times 2 = 6,12$ m et 6,12 < 7.
   Donc 7 m de fil suffiront.

2. Dans le triangle PMW, les points P, C, M et les points P, T, W sont alignés dans le même ordre.
   Vérifions si $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{PT}{PW}$.
   $\dfrac{PC}{PM} = \dfrac{3,78}{4,20}$ et $\dfrac{PT}{PW} = \dfrac{1,88}{2,30}$.
   On calcule les produits en croix : $3,78 \times 2,30 = 8,694$ et $4,20 \times 1,88 = 7,896$.
   Donc $\dfrac{PC}{PM} \neq \dfrac{PT}{PW}$.
   Les droites (CT) et (MW) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 1

1. Le triangle étant rectangle, on a : $\tan\ \alpha = \dfrac{1,89}{15}$
   Ainsi : $\alpha \approx 7,2°$.
2. (a) Les angles $\widehat{ACS}$ et α sont correspondants. Puisque les droites qui les forment sont parallèles alors $\widehat{ACS} = \alpha \approx 7,2°$.
   (b) La longueur d'un arc de cercle est proportionnel à la mesure de l'angle du secteur formé. On a alors le tableau de proportionnalité suivant :

Mesure de l'angle	$7,2$	360
Longueur de l'arc	800	L

   Ainsi : $L \approx \dfrac{800 \times 360}{7,2} \approx 40\ 000$ km.

EXERCICE 2

1. Le triangle ABC est rectangle en B. On a : $\cos\ \alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5,9}{6,3}$.
   Ainsi : $\alpha \approx 20,5°$.
   $20,5 < 45$ donc l'angle α ne permet pas un vidage complet de la benne.
2. (a) On note H le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC. Le triangle ABH est rectangle en H. On a : $\sin\ \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB}$ soit $\sin\ 45° = \dfrac{h}{5,9}$.
   Ainsi : $h = 5,9 \times \sin\ 45° \approx 4,17$ m.
   (b) Le triangle ABH est rectangle et isocèle en H donc $AH \approx 4,17$ m.
   Ainsi : $CH \approx 6 - 4,17 \approx 1,83$ m.
   Le triangle BCH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
   $BC^2 = BH^2 + HC^2 \approx 4,17^2 + 1,83^2 \approx 20,7378$
   D'où $BC \approx \sqrt{20,7378} \approx 4,55$ m.